

Determinarea experimentală a caracteristicii de rigiditate și a modului de elasticitate a cauciucului utilizând reprezentarea timp-frecvență

GILBERT-RAINER GILICH^{1*}, GHEORGHE SAMOILESCU², FLORIN BERINDE¹, CRISTIAN PAUL CHIONCEL¹

¹ Universitatea „Eftimie Murgu” din Reșița, P-ța Traian Vuia 1-4, 320085 Reșița, România

² Academia Navală ”Mircea cel Batrân” Constanța, Str. Fulgerului, Nr. 1,900218, Constanța, România

Rubber is often used as a vibration insulator for technical systems. Its behavior is linear until a deformation of at least 15%, by over this limit the behavior becomes non-linear. This means that the dynamic rigidity and implicitly the elasticity module change its value during the element is stressed under dynamic regime. The authors have developed a method to find out this parameters by processing data obtained by measurements with the Wigner-Ville Distribution.

Keywords: rubber, mechanical properties, time-frequency representations

Considerații teoretice

Mașinile și utilajele trebuie să asigure în timpul funcționării încadrarea în parametrii optimi. Solicitățile dinamice, care induc vibrații în structura mașinilor și utilajelor, determină necesitatea utilizării elementelor antivibraționale. Acestea sunt elemente amplasate discret în structură, fiind caracterizați prin proprietatea de rigiditate și cea de disipare. Uzual aceste elemente sunt confecționate din metal (arcuri) sau cauciuc, acesta din urmă fiind preferat pentru avantajele pe care le prezintă [1]:

Factorul de amortizare este mult mai mare la cauciuc;

La același volum, cauciucul înmagazinează cantități mai mari de energie decât oțelul;

Cauciucul asigură sisteme de izolare a vibrațiilor cu frecvențe proprii joase, datorită modului de elasticitate mult mai mic decât cel al oțelului;

Sistemele de amortizare pe bază de cauciuc sunt mai stabile și nu necesită întreținere;

Cauciucul are reziliență mai mare decât oțelul;

Cauciucul are însă dezavantajul că își schimbă proprietățile mecanice la deformare. Acest fapt duce la incertitudine pentru proiectant la introducerea în sistemele antivibraționale a unor elemente realizate cu tipurilor noi de cauciuc, întrucât acestea trebuie caracterizate și certificate din punct de vedere al proprietăților mecanice. Găsirea caracteristicilor tehnice prin experimentare rezolvă pe de o parte, aspectele privind documentarea în vederea proiectării, iar pe de altă parte, permit aprecierea modului în care se comportă elementele vibrabile în exploatare. Principalele caracteristici ale elementelor din cauciuc sunt: coeficientul de formă Φ , fluajul, modului de elasticitate static E_s și dinamic E_d , factorul de amortizare ψ și caracteristica de rigiditate statică k_s și dinamică k_d . În lucrarea de față cercetările sunt orientate spre determinarea modulelor de elasticitate E_s și dinamic E_d precum și a caracteristicilor de rigiditate k_s și k_d .

Caracteristica de rigiditate statică k_s se determină prin deformarea lentă (cu viteze sub 5 mm/min), la orice tip de presă, a elementelor din cauciuc cu minimum 15% din înălțimea elementului, determinându-se relația forță F –

deformare la compresiune Δh . Înregistrarea valorilor pentru ridicarea curbei se efectuează după ce se observă reducerea buclelor de histeresis mecanic la ciclul de încărcare-descărcare. Pentru deformații mici, la care dependența forță - deformare este liniară fiind valabilă legea lui Hook, valoarea caracteristicii de rigiditate statică k_s se determină cu relația:

$$k_s = \frac{F}{\Delta h} \quad (1)$$

Pentru valori mai mari ale deformării, de peste 10%, legea de variație nu mai este liniară, fiind necesară determinarea curbei de regresie [2] pentru o determinarea exactă. În oricare situație este necesar să se execute un număr mare de măsurători, pentru a putea fi prelucrate și validate statistic.

Pentru determinarea caracteristicii de rigiditate dinamică k_d , literatura de specialitate [1] indică două metode: prima constă în comprimarea elementului din cauciuc și permiterea vibrației libere, cea de-a doua constă în excitarea elementului cu o forță perturbatoare pentru obținerea rezonanței. Pentru primul caz, ținând seama de comportarea vâscoelastică a sistemului, totuși cu un pronunțat caracter elastic, se poate scrie ecuația de mișcare, [3, 4]:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} + k \cdot x = 0 \quad (2)$$

unde m este masa sistemului, c coeficientul de amortizare, iar k coeficientul de rigiditate. Dacă notăm:

$$2\alpha = \frac{c}{m} \quad \text{și} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

unde α este factorul de amortizare și ω pulsația proprie a sistemului fără amortizare și efectuăm substituțiile în relația (2), aceasta devine de forma:

$$\ddot{x} + 2 \cdot \alpha \cdot \dot{x} + \omega^2 \cdot x = 0 \quad (3)$$

având [3] psaeudopulsația

$$p = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2}$$

* email: raini@uem.ro

În acest caz, putem scrie pseudo-perioada T^* ca fiind:

$$T^* = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}} \quad (4)$$

Pentru sistem se poate măsura pseudoperioada semnalului T^* în zona de rezonanță, iar apoi se determină prin calcul caracteristica de rigiditate dinamică k_D cu relația următoare:

$$k_D = m \cdot \left[\frac{4\pi^2}{T^{*2}} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2 \right] \quad (5)$$

În a doua variantă, un sistem motor-vibrator având pulsația în regim de funcționare ω mai mare decât pulsația proprie ω_{cr} a elementului din cauciuc se oprește din funcționare. Pulsația scade la zero, suprapunându-se la un moment dat peste pulsația proprie a elementului din cauciuc, dând naștere fenomenului de rezonanță, caracterizat prin creșterea semnificativă a amplitudinii. Mărimea pseudoperioadei T_{rez} măsurată pentru acest interval este similară cu cea determinată la vibrația liberă amortizată.

Modulul de elasticitate static E_S se poate determina cu relația [1]:

$$E_S(x) = k_S \cdot h_0 \cdot (h_0 - x) / V_0 \quad (6)$$

unde h_0 este înălțimea inițială iar V_0 volumul inițial al elementului din cauciuc. Cu x s-a notat valoarea deformației, cum este ilustrat în figura 1.

În regim dinamic, modulul de elasticitate poate fi exprimat similar ca cel în regim static:

$$E_S(x) = k_S \cdot h_0 \cdot (h_0 - x) / V_0 \quad (7)$$

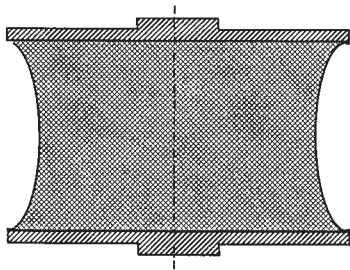


Fig. 1. Element antivibratil S 120 din cauciuc AB 31

cu mențiunea că se utilizează caracteristica de rigiditate k_D . Valoarea deformației x_D luată în calcul rezultă din însumarea deformației realizată prin încărcare statică x cu valoarea amplitudinii vibrației A .

Partea experimentală

Cercetând relația (6) se poate observa că E_S prezintă o variație liniară pe întregul domeniu și tinde la 0 pentru situația în care $\Delta h = h_0$, cum este ilustrat în figura 2.

Acest aspect se datorează caracteristicii de rigiditate k_S . Variația liniară are sens doar pentru un domeniu limitat, maximum 10% din h_0 , după care ar trebui ca variația să scadă după legea dată de o curbă. Desigur că nici fenomenul ca modulul de elasticitate să tindă la 0 nu are sens fizic. Pentru a prelungi domeniul de valabilitate, autorii propun exprimarea modulului de elasticitate static E_S în funcție de o caracteristică de rigiditate corectată k_S^* astfel:

-prin măsurători se determină perechile de valori forță F_i și deplasare x_i

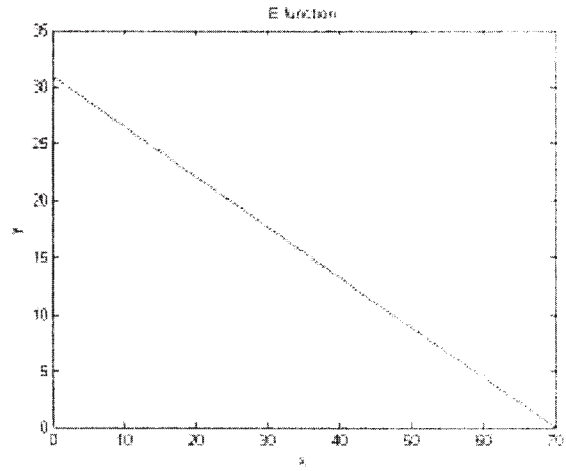


Fig. 2. Variația modulului de elasticitate static calculat

-se calculează pentru fiecare pereche de măsurători caracteristica de rigiditate k_{Si} cu relația

$$k_{Si} = \frac{F_i}{x_i} \quad (8)$$

și se asociază perechile $k_{Si} - x_i$

-se scrie relația dintre variabilele de mai sus, de forma

$$k_S^*(x) = a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 \quad (9)$$

-se determină coeficienții a_1 și a_2 cu relațiile [2]

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i k_{Si} \sum_{i=1}^n x_i^4 - \sum_{i=1}^n x_i^2 k_{Si} \sum_{i=1}^n x_i^3}{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^4 - \left(\sum_{i=1}^n x_i^3\right)^2} \quad (10)$$

$$a_2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 k_{Si} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i k_{Si} \sum_{i=1}^n x_i^3}{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n x_i^4 - \left(\sum_{i=1}^n x_i^3\right)^2} \quad (11)$$

care se înlocuiesc în relația (9)

- k_S^* astfel obținut se înlocuiește în (6), obținându-se valoarea modulului de elasticitate static E_S

$$E_S(x) = \frac{(k_S^*)(h_0 - x)}{A_0} \quad (12)$$

Al doilea demers al autorilor s-a axat pe determinarea frecvenței proprii a elementelor din cauciuc prin prelucrarea semnalului de răspuns al unui sistem masă-vibrator-element din cauciuc, aplicând distribuția Wigner-Ville. Măsurătorile efectuate până acum au fost realizate pe un stand de încercare prezentat în figura 3, existent la ICECON București [1]. Standul constă dintr-un sistem de excitație motor electric 1 și un vibrator 2, fixate pe o placă rigidă 3 care transmite excitația prin suportul 4 și cele trei brațe 5 sistemului de prindere 6. Acesta este format din două bacuri în care sunt prinse elementele elastice din cauciuc 7. Un traductor 8 măsoară mișcarea relativă dintre bacurile sistemului de prindere.

Determinarea cu exactitate a pseudoperioadei T_{rez} la trecerea prin rezonanță a unui sistem în vibrație este uneori dificilă, din cauza duratei reduse a fenomenului și a faptului că amplitudinea maximă depinde de defazajul dintre sursa

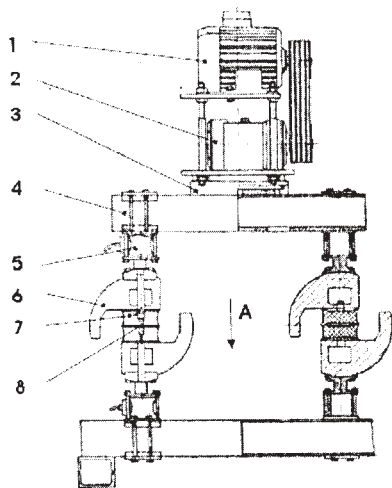


Fig. 3. Stand de încercare la vibrații forțate a elementelor din cauciuc

de vibrații și amortizor. Propunem înlocuirea motorului de curent alternativ cu un motor de curent continuu, cu turație reglabilă în regim continuu, care determină antrenarea vibratorului. Semnalul dat de acesta se înregistrează, pentru determinarea frecvenței excitației. Semnalul achiziționat la traductorul de mișcare este de asemenea achiziționat. Ambele semnale se pot reprezenta într-o diagramă timp-frecvență, de exemplu utilizând Distribuția Wigner-Ville [5] și [6]. Aceasta reprezintă distribuția timp-frecvență pentru sistemul în mișcare vibratorie, dând posibilitatea determinării prin citire directă a frecvenței excitației și a întregului sistem. Un exemplu realizat prin simulare este prezentat în figura 4.

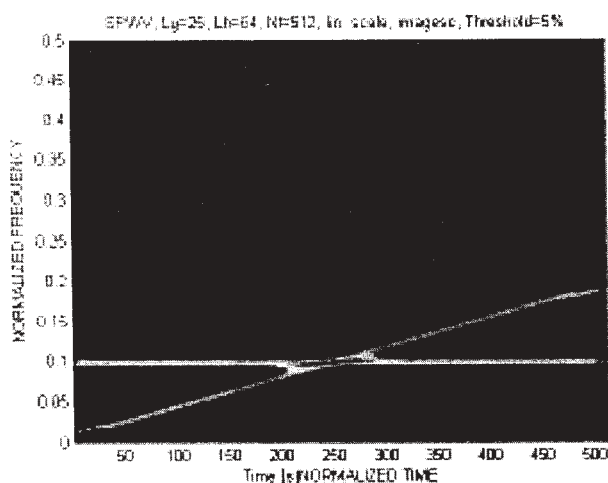


Fig. 4. Simularea comportării sistemului, cu punerea în evidență a celor două componente ale mișcării

Rezultate și discuții

Dacă valoarea lui E_s , descris cu relația (6) depinde de forma elementului elastic prin k_s , existând un grad mare de eroare la deformații mari, valoarea lui E_s , determinat cu relația (12) elimină acest dezavantaj. Pentru măsurători efectuate pe un element S 120 executat din cauciuc AB 31, datele fiind prezentate în tabelul 1, s-au determinat coeficienții a_1 și a_2 , și s-a ridicat diagrama modulului de elasticitate static (fig. 5).

Se va observa că variația este diferită de cea liniară, mult mai apropiată de valorile reale pentru deformații mai mari de 10%. Apreciem valabilitatea relației pentru deformații de până la 20-25%; se va observa că și aici, pentru valori foarte mari ale deformației modulul de elasticitate tinde

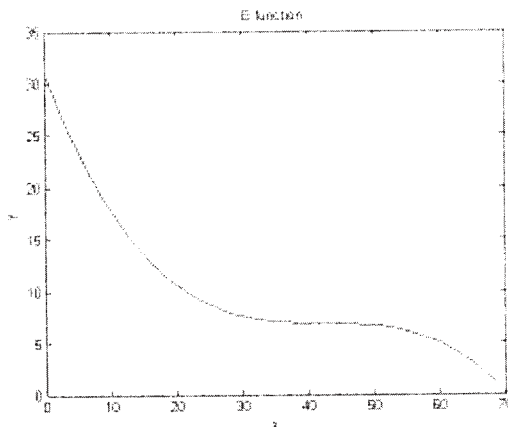


Fig. 5. Modulul de elasticitate static corectat

Tabelul 1
DEFORMAȚIA ÎN FUNCȚIE DE FORȚA APLICATĂ

Nr. crt.	Forța aplicată F [N]	Deformația x [mm]
1.	1200	2
2.	2420	4
3.	3640	6
4.	4830	8
5.	6010	10
6.	7190	12
7.	8150	14
8.	9218	16
9.	10097	18
10.	10290	20

la 0. Acest fapt nu se întâmplă în realitate, ideal ar fi ca relația să fie valabilă până la degradarea materialului prin strivire [7]. Pentru validarea rezultatelor obținute la fiecare tip de material trebuie efectuate o serie mare de încercări experimentale.

Referitor la modul de utilizare al Distribuției Wigner-Ville, din experiența autorilor reiese că este preferabil să se lucreze cu semnalele analitice asociate semnalelor reale [6], pentru a evita fenomenul de aliasing. Aceasta se realizează prin definirea semnalului analitic $x(t)$ ca fiind $x(t) \equiv s(t) + iH[s(t)]$, unde $H[s(t)]$ este Transformata Hilbert a semnalului $s(t)$ care reprezintă vibrația. În continuare când vorbim de semnalul $s(t)$, îl vom înlocui cu semnalul său analitic asociat $x(t)$. În acest caz, putem defini Distribuția Wigner-Ville ca fiind:

$$WVD_x(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i2\pi f \tau} d\tau \quad (13)$$

Această distribuție oferă cea mai bună rezoluție din familia ei, dar are dezavantajul apariției interferențelor. Acestea pot fi eliminate prin netezirea în frecvență și în amplitudine, rezultând așa-numita Pseudo Distribuție Wigner-Ville Netezită (Smoothed Pseudo Wigner-Ville Distribution), redată în relația (14):

$$SPWVD_x(t, f) = g(t) * \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \left[x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] e^{-i2\pi f \tau} d\tau \right) \quad (14)$$

Dacă semnalele prelucrate sunt cele achiziționate de la vibrator (excitația) și de la traductor (răspunsul sistemului)

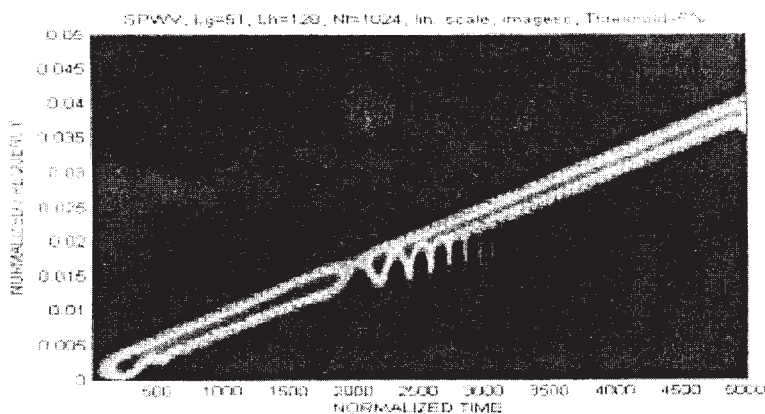
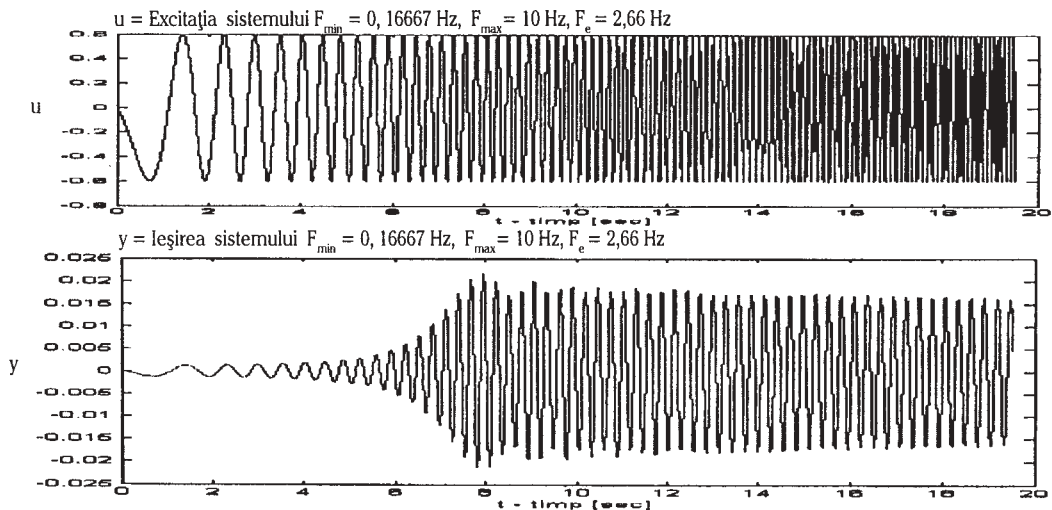


Fig. 6. Semnalele măsurate și reprezentarea timp-frecvență pentru sistemul în regim tranzitoriu

obținem o reprezentare timp-frecvență ca cea prezentată în figura 6.

În figura 6 a observăm o creștere continuă a frecvenței vibratorului (segmentul oblic), ceea ce are ca efect intrarea în rezonanță, în momentul în care frecvența acestuia atinge frecvența proprie a elementului din cauciuc. Acest lucru se observă în figura 6.c, pentru o valoare a frecvenței normale de 0,015, ceea ce corespunde unei frecvențe de 3,84 Hz. După depășirea acestei valori, frecvența motorului și implicit a vibratorului cresc până la o valoare predefinită, dar amplitudinea scade și sistemul se stabilizează. Acest aspect, confirmat și de literatura de specialitate, [3, 8], se poate constata și analizând semnalul de răspuns al sistemului, ilustrat în figura 6b. Verificarea corectitudinii citirii frecvenței se poate face prin excitarea sistemului cu frecvența respectivă și tatonări în jurul acestei valori.

Concluzii

Deformațiile mici ale elementelor din cauciuc permit luarea în considerare a legii lui Hook. Pentru determinări precise ale caracteristicii de rigiditate, la deformații mari ale acestor elemente sunt adecvate metodele statisticii, determinarea constantei în acest mod fiind recomandată pentru materiale noi sau pentru produse la care trebuie cunoscută foarte precis această caracteristică. Prin introducerea noțiunii de caracteristică de rigiditate statică corectată k_s^* propusă de autori, se poate modela exact comportarea elementelor din cauciuc la deformații mari.

Determinarea caracteristicii de rigiditate dinamică prin utilizarea Distribuției Wigner-Ville conduce la rezultate exacte, întrucât nu mai sunt bazate pe fenomene tranzitorii

de scurtă durată. Posibilitatea adaptării rapide la schimbarea condițiilor de solicitare (modificarea deformației statice, a amplitudinii excitației sau a direcției solicitării) permite obținerea unei serii de rezultate care pot fi utilizate la ridicarea familiilor de curbe ale caracteristicii de rigiditate dinamică.

Bibliografie

1. BRATU P., Sisteme elastice de rezemare pentru mașini și utilaje, Ediția 1, Editura Tehnică, București, 1990, p. 118, 187
2. MOCANU D.R., Analiza experimentală a tensiunilor, Ediția 1, 2, Editura Tehnică, București, 1977, p. 900
3. RĂDOI M., DECIU E., VOICULESCU D., Elemente de vibrații mecanice, Ediția 1, Editura Tehnică, București, 1973, p. 58
4. GILLICH G.R., Dinamica mașinilor, Ediția 1, Editura AGIR, București, 2003
5. KLING G., ROADS C., Audio Analysis, Visualization and Transformation with the Matching Pursuit Algorithm, Proceedings of the 7th International Conference on Digital Audio Effects (DAFx'04), Naples, Italy, October 5-8, 2004, p. 34
6. BERINDE F.C., Gilbert-Rainer GILLICH G.R., CHIONCEL C.P., Structure Monitoring and Evaluation Using vibro-Acoustic Method Supported by the Wigner-Ville Distribution, Romanian Journal of Acoustics and Vibration, (date nepublicabile)
7. DIN 53504 1994-05, Prüfung von Kautschuk und Elastomeren; Bestimmung von Reißfestigkeit, Zugfestigkeit, Reißdehnung und Spannungswerten im Zugversuch
8. BRATU P., Vibrațiile sistemelor elastice, Ediția 1, Editura Tehnică, București, 2000, p. 119

Întriat în redacție: 12.12.2006